2 Mathematische Grundlagen der Robotik

2.1 Kinematische Ketten

Die mechanische Struktur eines Industrieroboters kann näherungsweise als ein Mehrkörpersystem modelliert werden, das aus miteinander verketteten massebehafteten Starrkörpern besteht, die zueinander Relativbewegungen ausführen. Diese Starrkörper werden im folgenden als Glieder oder Achskörper in einer kinematischen Kette bezeichnet. Zwischen diesen Gliedern existieren an diskreten Punkten Gelenke, die die Bewegungen einschränken. Man unterscheidet serielle und parallele kinematische Ketten. Bei seriellen kinematischen Ketten haben das erste und das letzte Glied jeweils ein Nachbarglied, während alle anderen Glieder zwei Nachbarglieder besitzen (Bild 1).

Eine parallele oder geschlossene kinematische Kette liegt dagegen dann vor, wenn die Glieder eine Schleifenstruktur bilden (Bild 1). Das verbindende Glied kann dabei auch die Basis sein.

Eine kinematische Kette trägt üblicherweise einen Endeffektor. Das ist ein Werkzeug oder ein Greifer, über den der Roboter mit seiner Umgebung in Kontakt tritt.

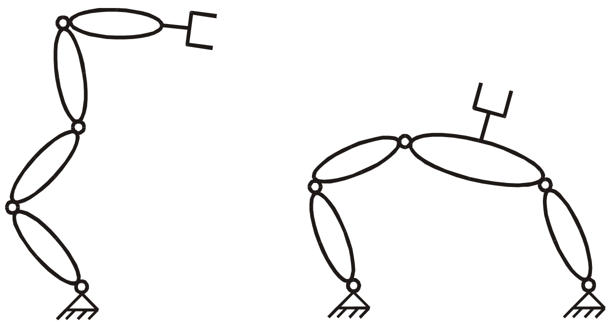

Bild 1: Serielle und parallele kinematische Kette mit Endeffektor

Um die Position und Orientierung des Endeffektors mathematisch beschreiben zu können, werden den Gliedern eines Roboters Koordinatensysteme zugeordnet (Bild 2). Die Koordinaten legen die Lage eines Gliedes in der kinematischen Kette bezüglich des vorherigen und nachfolgenden Gliedes fest. Verschiebungen und Drehungen der Glieder können dann mit Hilfe von Transformationen und Vektorbeziehungen zwischen den zugeordneten Koordinatensystemen beschrieben werden.

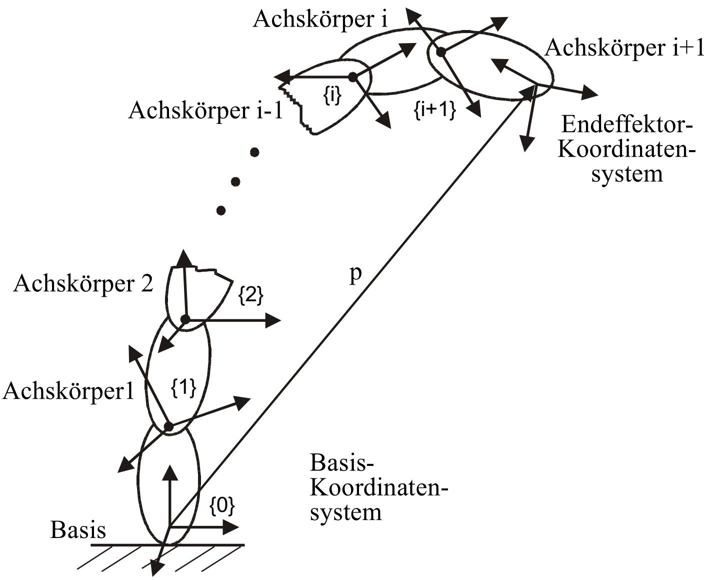

Bild 2: Roboter als kinematische Kette mit Koordinatensystemen und Vektorbeziehungen

2.2 Vektoren im Raum

Ein Vektor hat als Eigenschaft die Größe (Länge) und die Richtung. Er wird durch seine Koordinaten repräsentiert. Wenn ein räumlicher Vektor am Punkt A startet und am Punkt B endet, so lautet seine mathematischen Beschreibung:

$$\mathbf{p_{AB}} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}. \qquad \text{(Gl. 2.2-1)}$$

Das skalare Produkt zweier Vektoren $\mathbf{a}=(a_1, a_2,..., a_n)^T$ und $\mathbf{b}=(b_1, b_2,...,b_n)^T$ ergibt eine skalare Größe:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a^T} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n . \qquad \text{(Gl. 2.2-2)}$$

An dieser Stelle ist anzumerken, dass im vorliegenden Buch Spaltenvektoren aus Platzgründen vielfach als Zeilenvektoren geschrieben werden. Um klarzustellen, dass es sich um Spaltenvektoren handelt, wird ein „T“ für Transponierung hinten angestellt.

Zwei Vektoren sind orthogonal, wenn ihr Skalarprodukt gleich Null ist:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a^T} \cdot \mathbf{b} = 0 . \qquad \text{(Gl. 2.2-3)}$$

Die Länge eines Vektor **a** wird mit $|\mathbf{a}|$ gekennzeichnet und ist die quadratische Wurzel des skalaren Produkts von **a** mit sich selbst:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a^T} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} . \qquad \text{(Gl. 2.2-4}$$

Ein Einheitsvektor ist ein Vektor, der die Länge 1 hat. Wenn $\mathbf{a}=(a_1, a_2,..., a_n)^T$ ein beliebiger Vektor ist, so lautet ein zu **a** kollinearer Einheitsvektor $\mathbf{a_0}$:

$$\mathbf{a_0} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}^T . \qquad \text{(Gl. 2.2-5)}$$

Beispiel 1: Einheitsvektoren

Zum Vektor $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^T$ soll der zugehörige Einheitsvektor $\mathbf{p_0}$ bestimmt werden.

Lösung:

Mit

$$|\mathbf{p}| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} = \sqrt{4+9+1} = 3,742$$

lautet der zugehörige Einheitsvektor

$$\mathbf{p_0} = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} = \frac{1}{|\mathbf{p}|}\begin{pmatrix} p_x & p_y & p_z \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0,535 & 0,802 & 0,267 \end{pmatrix}^T .$$

Die Überprüfung ergibt die Richtigkeit der Rechnung:

$$|\mathbf{p_0}| = \sqrt{p_{0x}^2 + p_{0y}^2 + p_{0z}^2} = \sqrt{0,535^2 + 0,802^2 + 0,267^2} = 1 .$$

Vektoren können zusätzlich einen Skalierungsfaktor w enthalten, so dass ihre Komponenten durch w geteilt werden. Wenn w gleich 1 ist, dann bleiben die Vektorkomponenten unverändert. Einheitsvektoren können mit einem Faktor w=0 ausgedrückt werden.

Beispiel 2: Vektoren mit Skalierung

Ein Vektor lautet

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^T .$$

Er soll mit dem Faktor w=1 und dem Faktor w=2 skaliert werden.

Lösung:

$$\mathbf{p_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{p_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2.3 Beschreibung von Koordinatensystemen

Ein Koordinatensystem läßt sich durch die Position seines Ursprungs und durch seine Orientierung beschreiben. Diese Angaben sind gegenüber einem Bezugssystem zu definieren.

In Bild 3 ist ein Starrkörper dargestellt, auf dem das Koordinatensystem {B} haftet. {B} ist gegenüber dem Referenzsystem {A} zu beschreiben. Koordinatensysteme werden in der diesem Buch zugrunde liegenden Notation immer in geschweiften Klammern angegeben. Die Position des Ursprungs von {B} kann durch einen 3x1-Positionsvektor beschrieben werden, der im Koordinatensystem {A} definiert ist. Das Bezugskoordinatensystem wird bei diesem Ortsvektor durch einen vorangestellten hochstehenden Index ausgedrückt:

$$ {}^{\mathbf{A}}\mathbf{p}_{\mathbf{OB}} = \left({}^{A}p_{OB,x} \quad {}^{A}p_{OB,y} \quad {}^{A}p_{OB,z} \right)^{T}. \qquad \text{(Gl. 2.3-1} $$

Das Koordinatensystem {B} wird durch drei senkrecht zueinander stehende Einheitsvektoren **n**, **o** und **a** aufgespannt. Jeder dieser Vektoren wird repräsentiert durch seine drei Komponenten gegenüber dem Bezugskoordinatensystem {A}. Diese drei Vektoren lassen sich zu einer 3×3-Rotationsmatrix ${}^{\mathbf{A}}_{\mathbf{B}}\mathbf{R}$ zusammenstellen:

$$ {}^{\mathbf{A}}_{\mathbf{B}}\mathbf{R} = \left[{}^{\mathbf{A}}\mathbf{n}_{\mathbf{B}} \quad {}^{\mathbf{A}}\mathbf{o}_{\mathbf{B}} \quad {}^{\mathbf{A}}\mathbf{a}_{\mathbf{B}} \right]. $$

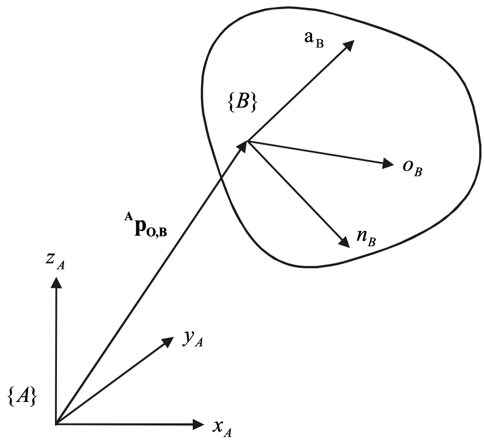

Bild 3: Koordinatensystem {B} bezogen auf das Koordinatensystem {A}

Darin bedeutet ${}^{\mathbf{A}}_{\mathbf{B}}\mathbf{R}$ die Rotationsmatrix, die die Orientierung des Koordinatensystems {B} in den Koordinaten von {A} beschreibt. Die ausformulierte Rotationsmatrix lautet:

$$ {}^{A}_{B}\mathbf{R} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix}. \qquad \text{(Gl. 2.3-2)} $$

Die darin enthaltenen 9 Einträge können auch als Richtungskosinus der drei Vektoren **n**, **o**, **a** gegenüber dem Bezugssystem {A} angesehen werden. Ein Richtungskosinus eines Vektors wird bestimmt durch seine Winkel gegen die drei positiven Achsen des Bezugssystems.

Beispiel 3: Aufstellung einer Rotationsmatrix

In Bild 4 sind die Koordinatensystem {A} und {B} dargestellt. Es ist die Rotationsmatrix ${}^{A}_{B}\mathbf{R}$ aufzustellen.

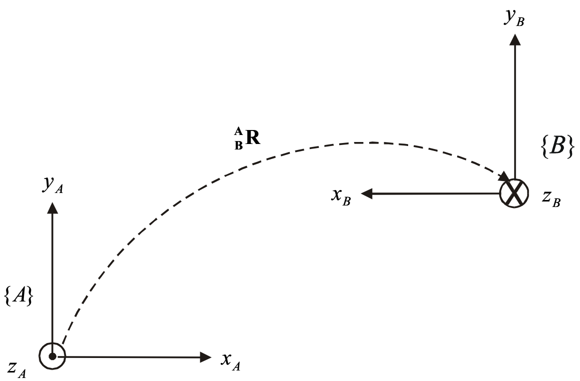

Bild 4: Bestimmung der Rotationsmatrix ${}^{A}_{B}\mathbf{R}$

Lösung:

Der erste Spaltenvektor von ${}^{A}_{B}\mathbf{R}$ beschreibt die x-Achse von {B} in den Koordinaten von {A}. Der zweite Spaltenvektor gibt die y_B-Achse in den Koordinaten von {A} an und die dritte Spalte von ${}^{A}_{B}\mathbf{R}$ enthält die Beschreibung der z_B–Achse in den Koordinaten von {A}. Damit erhält man:

$$ {}^{A}_{B}\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. $$

Generell gilt, dass die Rotationsmatrix ${}^{A}_{B}\mathbf{R}$ die Orientierung von {B} vollständig gegenüber {A} festlegt. Die Spalten der Rotationsmatrix repräsentieren drei orthogonale Einheitsvektoren, die in den Koordinaten von {A} ausgedrückt sind. Darum ist auch die Rotationsmatrix orthogonal. Die Orthogonalitätsbeziehungen lauten mit den Spaltenvektoren **n**, **o** und **a**:

$$|\mathbf{n}| = 1, \qquad |\mathbf{o}| = 1, \qquad |\mathbf{a}| = 1,$$

$$\mathbf{n}^{\mathbf{T}}\mathbf{o} = 0, \qquad \mathbf{o}^{\mathbf{T}}\mathbf{a} = 0, \qquad \mathbf{a}^{\mathbf{T}}\mathbf{n} = 0.$$

(Gl. 2.3-3)

Aufgrund der Orthogonalitätsbeziehungen sind nur drei der 9 Elemente von ${}^{A}_{B}\mathbf{R}$ unabhängig. Mit den Orthogonalitätsbeziehungen gilt:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{o} = \mathbf{a}; \quad \mathbf{o} \times \mathbf{a} = \mathbf{n}; \quad \mathbf{a} \times \mathbf{n} = \mathbf{o}. \qquad \text{(Gl. 2.3-4)}$$

Für orthogonale Matrizen gilt, dass das Produkt der Matrix mit ihrer transponierten Matrix gleich der Einheitsmatrix **I** ist:

$$\mathbf{R}^{\mathbf{T}}\mathbf{R} = \mathbf{I}. \qquad \text{(Gl. 2.3-5)}$$

Weiterhin gilt für rechtshändige Koordinatensysteme:

$$\det \mathbf{R} = 1. \qquad \text{(Gl. 2.3-6)}$$

Beispiel 4: Rotationsmatrixeigenschaften

In der nachfolgenden Rotationsmatrix fehlen Elemente, die zu vervollständigen sind:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0,4036 & -0.8309 & a_x \\ 0.7851 & 0.5295 & 0.3214 \\ n_z & 0.1710 & a_z \end{bmatrix}.$$

Lösung:

$$\mathbf{n}^{\mathbf{T}}\mathbf{o} = 0 \quad => \quad n_x o_x + n_y o_y + n_z o_z = 0,$$

$$n_z = \frac{-0,0804}{0,1710} = -0,4699,$$

$$\mathbf{a}^{\mathbf{T}}\mathbf{n} = 0 \quad => \quad a_x n_x + a_y n_y + a_z n_z = 0,$$

$$a_x \cdot 0,4036 + 0,2523 - 0,4699 \cdot a_z = 0,$$

$$\mathbf{o}^\mathbf{T}\mathbf{a} = 0 \quad => \quad o_x a_x + o_y a_y + o_z a_z = 0,$$

$$a_x = 0,2048 + 0,2058 \cdot a_z .$$

Damit existieren zur Lösung von a_x und a_z zwei Gleichungen. Die Berechnung ergibt die folgende Rotationsmatrix:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0,4036 & \text{-0.8309} & 0.3830 \\ 0.7851 & 0.5295 & 0.3214 \\ \text{-0.4699} & 0.1710 & 0.8660 \end{bmatrix}.$$

Eine Rotationsmatrix ${}^{\mathbf{A}}_{\mathbf{B}}\mathbf{R}$ kann genutzt werden, um einen Vektor ${}^{\mathbf{B}}\mathbf{p}$, der im Koordinatensystem {B} definiert ist, in das Koordinatensystem {A} zu überführen:

$${}^{\mathbf{A}}\mathbf{p} = {}^{\mathbf{A}}_{\mathbf{B}}\mathbf{R}\, {}^{\mathbf{B}}\mathbf{p} . \qquad \text{(Gl. 2.3-7)}$$

Beispiel 5: Vektorrotation

Mit Hilfe der Rotationsmatrix

$${}^{\mathbf{A}}_{\mathbf{B}}\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

soll der im Koordinatensystem {B} definierte Ortsvektor

$${}^{\mathbf{B}}\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T$$

im Koordinatensystem {A} beschrieben werden.

Lösung:

$${}^{\mathbf{A}}\mathbf{p} = {}^{\mathbf{A}}_{\mathbf{B}}\mathbf{R}\, {}^{\mathbf{B}}\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Eine weitere Eigenschaft von Rotationsmatrizen, die sich aus deren Orthogonalität ergibt, ist die einfache Inversenbildung. Wenn man (Gl. 2.3-5) von rechts beidseitig mit $\mathbf{R}^{-1}$ multipliziert, so ergibt sich, dass die Inverse einer Rotationsmatrix gleich deren Transponierte ist:

$$\mathbf{R}^{\mathbf{T}} = \mathbf{R}^{-1} \qquad \text{(Gl. 2.3-8)}$$

oder

$$^{\mathbf{B}}_{\mathbf{A}}\mathbf{R} = \left(^{\mathbf{A}}_{\mathbf{B}}\mathbf{R} \right)^{-1} = {}^{\mathbf{A}}_{\mathbf{B}}\mathbf{R}^{\mathbf{T}}. \qquad \text{(Gl. 2.3-9)}$$

Beispiel 6: Inversenbildung einer Rotationsmatrix

Die Rotationsmatrix $^{\mathbf{A}}_{\mathbf{B}}\mathbf{R}$ soll invertiert werden.

$$^{\mathbf{A}}_{\mathbf{B}}\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0,707 & -0,707 & 0 \\ 0,707 & 0,707 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lösung:

$$^{\mathbf{B}}_{\mathbf{A}}\mathbf{R} = {}^{\mathbf{A}}_{\mathbf{B}}\mathbf{R}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0,707 & 0,707 & 0 \\ -0,707 & 0,707 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.4 Rotationen mit Sinusfunktionen

Koordinatensysteme, die zueinander beliebig orientiert sind, können mit Hilfe von Sinus- und Kosinusfunktionen beschrieben werden. Im folgenden wird dies beispielhaft vorgeführt.

Es wird zunächst die Drehung eines Koordinatensystems um einzelne Achsen beschrieben. Später wird die dabei verwendete Methode auf zusammengesetzte Rotationen ausgeweitet. Betrachtet wird Bild 5.

Das Koordinatensystem {n, o, a} habe den gleichen Ursprung und die gleich Orientierung wie das ortsfeste Koordinatensystem {x, y, z}. Gegeben ist ein Punkt P, der fest mit dem System {n, o, a} verbunden ist. Der Punkt P kann sowohl mit den Koordinaten (P_x, P_y, P_z) als auch mit den Koordinaten (P_n, P_o, P_a) beschrieben werden.

Das System {n, o, a} führt nun eine Rotation gegenüber {x, y, z} um die z-Achse mit dem Winkel γ aus (Bild 5). Der Punkt P wird dabei mitgedreht. Nach der Drehung ist die Beschreibung des Punktes P unterschiedlich – je nachdem von welchem Koordinatensystem aus die Betrachtung erfolgt.

Um die unterschiedlichen Beschreibungen einfacher erfassen zu können, wird die Drehung in der xy-Ebene betrachtet (Bild 5). Während sich die Beschreibung von P im System {n, o, a} nicht ändert, lautet der gedrehte Punkt P im Koordinatensystem {x, y, z}:

$$P_x = OC - AC = P_n \cos\gamma - P_o \sin\gamma \,,$$

$$P_y = OB + BD = P_n \sin\gamma + P_o \cos\gamma \,, \qquad \text{(Gl. 2.4-1)}$$

$$P_z = P_a \,.$$

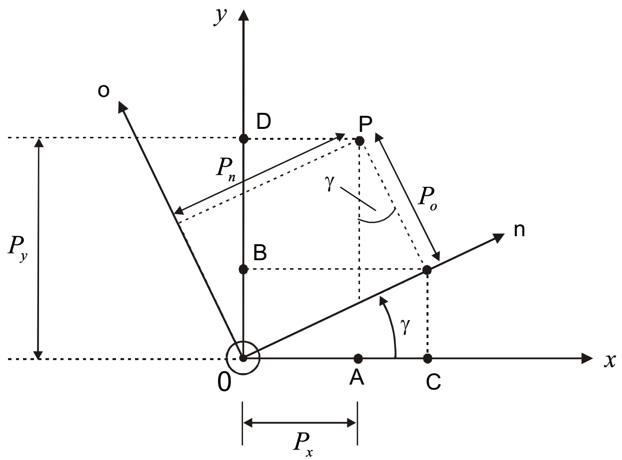

Bild 5: Planare Darstellung einer Drehung des Punktes P um die z-Achse

Die Gleichungen lauten in Matrizenschreibweise zusammengefaßt:

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_n \\ P_o \\ P_a \end{pmatrix}.$$

Für eine Drehung um die z-Achse mit dem Winkel γ läßt sich damit verallgemeinert die folgende Rotationsmatrix schreiben:

$$\mathbf{R}(z,\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad \text{(Gl. 2.4-2)}$$

Ebenso ergeben sich für eine Rotation um die y-Achse mit dem Winkel β und um die x-Achse mit dem Winkel α die Rotationsmatritzen

$$\mathbf{R}(y,\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}, \qquad \text{(Gl. 2.4-3)}$$

$$\mathbf{R}(x,\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}. \qquad \text{(Gl. 2.4-4)}$$

Derartige Rotationsmatritzen, die Rotationen um einzelne Achsen des Basiskoordinatensystems darstellen, werden als Basis-Rotationsmatrizen bezeichnet.

Beispiel 7: Rotierendes Koordinatensystem

Der dargestellte Quader in Bild 6 sei mit dem Koordinatensystem {B} fest verbunden. Die Position von Punkt P auf dem Quader soll nach einer Drehung um die y-Achse mit dem Winkel β=+90° gegenüber dem ortsfesten Referenzsystem {A} bestimmt werden.

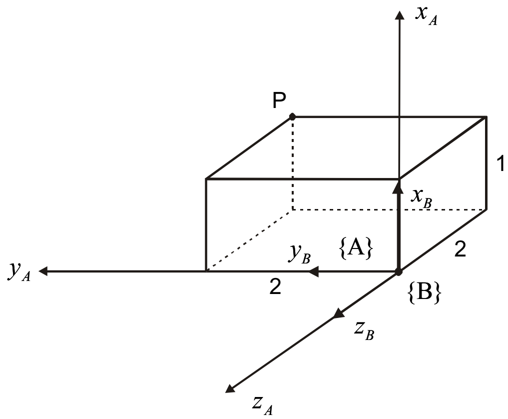

Bild 6: Position des Punktes P nach einer Drehung des Quaders um die y-Achse

Lösung:

Nach der Drehung lautet die Position von P aus der Sicht von Koordinatensystem {A}:

$$ {}^{\mathbf{A}}\mathbf{p} = \mathbf{R}(\beta, \mathrm{y}) \cdot {}^{\mathbf{B}}\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & 0 & \sin 90^\circ \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin 90^\circ & 0 & \cos 90^\circ \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}. $$

2.5 Transformationsmatrizen

Eine 3×3-Matrix kann für eine Rotation, aber nicht für eine Translation von Objekten, genutzt werden. Man kann die Translation durch das Hinzufügen eines 3x1-Spaltenvektors beschreiben, aber die entstehende Matrix ist zunächst nicht quadratisch und hat keine Inverse. Eine Lösung dieses Problems schafft das Hinzufügen einer vierten Zeile zu einer 4×4-Transformationsmatrix. Sie ermöglicht prinzipiell die Beschreibung von Rotationen, Translationen, Projektionen und Skalierungen. Da man in der Robotik nur an der Rotation und der Translation interessiert ist, wird der Skalierungsfaktor des vierten Spaltenvektors w zu 1 gesetzt. Die ersten drei Spaltenvektoren erhalten einen Faktor w=0, da es Einheitsvektoren sind.

Damit entsteht die in der Robotik verwendete homogenisierte 4×4-Transformationsmatrix durch das Zusammenfassen eines Positionsvektor ${}^{A}\mathbf{r}_{OB}$, der von einem Koordinatensystem {A} zum Ursprung eines Koordinatensystems {B} weist und einer Rotationsmatrix ${}^{A}_{B}\mathbf{R}$, die die Drehung von {B} gegenüber {A} beschreibt (Bild 7):

$$ {}^{A}_{B}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}\mathbf{R} & {}^{A}\mathbf{r}_{OB} \\ \mathbf{0}^{T} & 1 \end{bmatrix}. \qquad \text{(Gl. 2.5-1)} $$

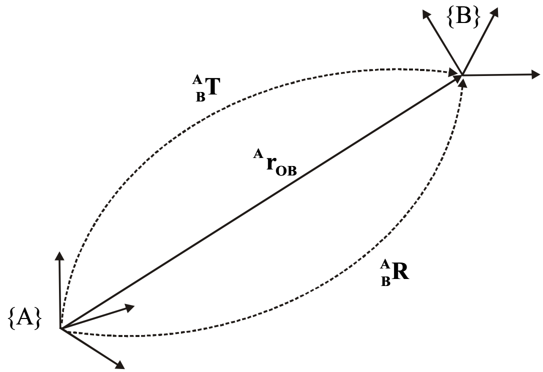

Bild 7: Transformationsbeziehung

Beispiel 8: Rotation und Transformation mit Transformationsmatrix

In Bild 8 soll das Koordinatensystem {0} in das System {1} überführt werden. Gesucht ist die zugehörige Transformationsmatrix ${}^{0}_{1}\mathbf{T}$.

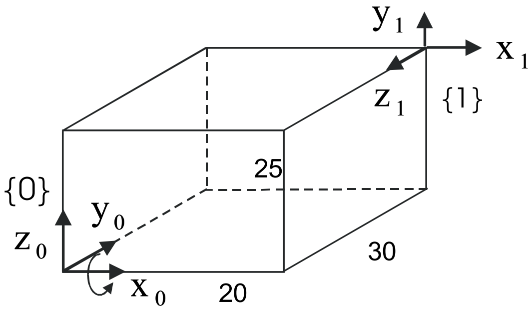

Bild 8: Quader mit Koordinatensystemen

Lösung:

Die gesuchte Transformationsmatrix ${}^{0}_{1}\mathbf{T}$ setzt sich zusammen aus einer Rotationsmatrix ${}^{0}_{1}\mathbf{R}$ und einem Translationsvektor. Das Koordinatensystem {0} wird in die Orientierung von {1} überführt, indem eine Drehung von $\pi/2$ um die Achse x_0 ausgeführt wird:

$$ {}^{0}_{1}\mathbf{R} = \mathbf{R}\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \pi/2 & -\sin \pi/2 \\ 0 & \sin \pi/2 & \cos \pi/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. $$

Der Translationsvektor, der benötigt wird, um vom Koordinatensystem {0} zum Ursprung von Koordinatensystem {1} zu kommen, lautet:

$$ {}^{0}\mathbf{p}_{0,1} = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 25 \end{pmatrix}^{T}. $$

Das Ergebnis der Rotation und der Translation wird dann in einer homogenen 4×4-Matrix zusammengefaßt:

$$ {}^{0}_{1}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. $$

Transformationsmatrizen werden eingesetzt, um Vektoren in ein andere Koordinatensysteme zu überführen. Die verwendeten Vektorgrößen benötigen dazu vier Komponenten. Es muss beachtet werden, ob es sich um die Multiplikation einer Transformationsmatrix mit einem freien Vektor oder einem Ortsvektor handelt.

Bei der Multiplikation einer Transformationsmatrix mit einem Ortsvektor muss dessen vierte Komponente stets eine Eins enthalten:

$$ {}^{\mathbf{i}}\mathbf{p} = {}^{\mathbf{i}}_{\mathrm{j}}\mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} {}^{\mathrm{j}}p_x \\ {}^{\mathrm{j}}p_y \\ {}^{\mathrm{j}}p_z \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad \text{(Gl. 2.5-2)} $$

Bei der Multiplikation einer Transformationsmatrix mit einem freien Vektors muss dessen vierte Komponente eine Null enthalten:

$$ {}^{\mathbf{i}}\mathbf{f} = {}^{\mathbf{i}}_{\mathrm{j}}\mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} {}^{\mathrm{j}}f_x \\ {}^{\mathrm{j}}f_y \\ {}^{\mathrm{j}}f_z \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{(Gl. 2.5-3)} $$

Beispiel 9: Kraftvektoren transformieren

Gegeben sei ein Roboterendeffektor (Bild 9). Auf ihn wirke eine lokale Kraft in den Koordinaten des Endeffektors {e}. Das System {e} sei gegenüber {0} um die z_0-Achse um 45° gedreht. Der Ursprung von {e} habe einen Abstand von x=600 mm, y=300 mm und z=250 mm gegenüber dem Ursprung von {0}. Der Kraftvektor lautet: ${}^{\mathbf{e}}\mathbf{F}=(10\text{N}\ 30\text{N}\ -20\text{N})^T$.
Es sind die Kräfte im Koordinatensystem {0} auszudrücken.

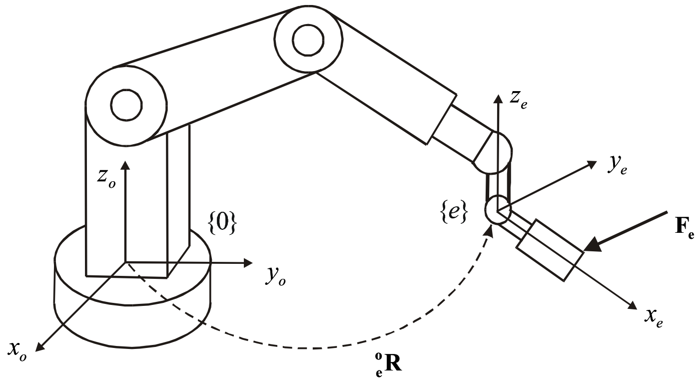

Bild 9: Roboter mit Kraft-Vektor am Werkzeug

Lösung:

$^{0}\mathbf{F} = {}^{0}_{e}\mathbf{T}\,{}^{e}\mathbf{F}$.

Da es sich um die Multiplikation einer Transformationsmatrix mit einem freien Vektor und keinem Ortsvektor handelt, muss die vierte Komponente des Kraftvektors eine Null enthalten. Die Multiplikation lautet:

$$^{0}\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \cos 45° & -\sin 45° & 0 & 0,6 \\ \sin 45° & \cos 45° & 0 & 0,3 \\ 0 & 0 & 1 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{N} = \begin{pmatrix} -14,14 \\ 28,28 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{N}.$$

2.6 Inverse Transformationsmatrix

Die Transformationsmatrix, die das Koordinatensystem {B} in den Koordinaten von {A} in Bild 10 beschreibt, lautet:

$$^{A}_{B}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} ^{A}_{B}\mathbf{R} & ^{A}\mathbf{r}_{\mathbf{OB}} \\ \mathbf{0}^{\mathbf{T}} & 1 \end{bmatrix}.$$

Die inverse Transformationsmatrix $^{B}_{A}\mathbf{T}$, die das Koordinatensystem {A} in den Koordinaten von {B} beschreibt, wird aufgestellt mit:

$$ {}^{B}_{A}\mathbf{T} = \left({}^{A}_{B}\mathbf{T}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}\mathbf{R}^{T} & -{}^{A}_{B}\mathbf{R}^{T}\,{}^{A}\mathbf{r}_{OB} \\ \mathbf{0}^{T} & 1 \end{bmatrix}. \qquad \text{(Gl. 2.6-1)} $$

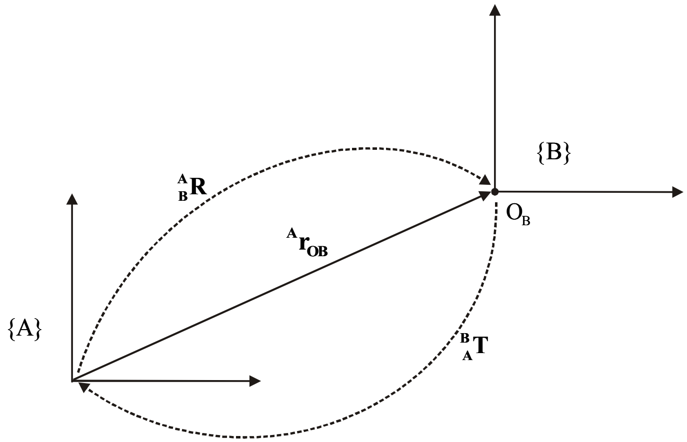

Bild 10: Beziehung zwischen zwei Koordinatensystemen

Beispiel 10: Invertierung einer Transformationsmatrix

Gegeben sei ein Koordinatensystem {B}, das gegenüber {A} um 30° um die Z_A-Achse gedreht worden ist. Der Ursprung von {B} ist um vier Einheiten in Richtung der X_A-Achse und um drei Einheiten in Richtung der Y_A-Achse verschoben worden. Es ist die Transformationsmatrix ${}^{A}_{B}\mathbf{T}$ und anschließend ihre Inverse ${}^{B}_{A}\mathbf{T}$ zu erstellen.

Lösung:

$$ {}^{A}_{B}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0{,}86 & -0{,}5 & 0 & 4 \\ 0{,}5 & 0{,}86 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. $$

Für die inverse Transformation ist zunächst die Rotationmatrix zu erstellen:

$$
{}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{A}}\mathbf{R}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 0,86 & 0,5 & 0 \\ -0,5 & 0,86 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
$$

Der Positionsvektor in der inversen Matrix lautet:

$$
-{}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{A}}\mathbf{R}^{\mathbf{T}}\,{}^{\mathbf{A}}\mathbf{r}_{\mathbf{O,B}} = \begin{bmatrix} -0,86 & -0,5 & 0 \\ 0,5 & -0,86 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4,94 \\ -0,58 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

Daraus folgt durch Zusammensetzen:

$$
{}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}}\mathbf{T} = \left({}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{A}}\mathbf{T}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,86 & 0,5 & 0 & -4,94 \\ -0,5 & 0,86 & 0 & -0,58 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
$$

2.7 Roll-Gier-Nick-Winkel

Basis-Rotationsmatritzen können miteinander multipliziert werden und repräsentieren dann das Ergebnis einer Folge von hintereinander ausgeführten Einzelrotationen. Damit kann jede Drehung auch durch drei aufeinander folgende Drehwinkel ausgedrückt werden. Da Matrix-Multiplikationen nicht kommutativ sind, muss die Reihenfolge der Multiplikation beachtet werden. Es werden in der Technik zwei prinzipiell unterschiedliche Drehwinkelkonventionen eingesetzt, nämlich Eulerwinkel und Roll-Gier-Nick-Winkel.

Die Roll-Gier-Nick-Winkel stehen für drei aufeinander folgende Drehungen und werden im Englischen als Roll, Pitch und Yaw bezeichnet (Abkürzung RPY). Die Begriffe sind der Schifffahrt entlehnt und werden auch in der Luftfahrt verwendet. Eine Anwendung für eine Roboterhand ist in Bild 11 dargestellt.

Das wesentliche Kennzeichen der Roll-Gier-Nick-Winkel ist, dass gegenüber einem ortsfesten Referenzkoordinatensystem gedreht wird. Es sei als {A} bezeichnet. Dann folgen drei Drehoperationen, deren Reihenfolge strikt einzuhalten ist: